Школа абитуриента. 2009-2010 учебный год.

Занятие на тему «Решение логарифмических неравенств».

Учитель: Моделкина Е. В. СОШ №4 «ЦО»

п.1 Стандартные приёмы решения.

1. Рассмотрим решение основных логарифмических неравенств с помощью совокупности систем .

1) $\log_{f(x)} g(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) \leq 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geq 1 \end{cases}$

2)$\log_{f(x)} g(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \geq 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < g(x) \leq 1 \end{cases}$

3)$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

4) $\log_{h(x)} f(x) \leq \log_{h(x)} g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

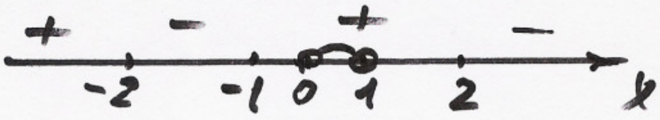
Пример: Решите неравенство $\log_x \frac{3x+2}{x+2} > 1$

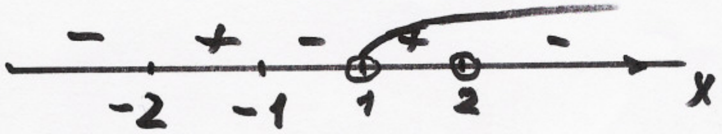
Решение : $\log_x \frac{3x+2}{x+2} > \log_x x$

$$\begin{cases} \frac{3x+2}{x+2} > x \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{3x+2}{x+2} < x \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{3x+2-x^2-2x}{x+2} > 0 \qquad \frac{-x^2+x+2}{x+2} < 0$$

$$\frac{-x^2+x+2}{x+2} > 0$$





Ответ: (1 ; 2).

2. С применением свойств логарифмической функции.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{|x-1|} 0{,}5 > 0{,}5$.

Решение: т. к. $\log_{|x-1|} 0{,}5 > 0$, то $0 < |x-1| < 1$

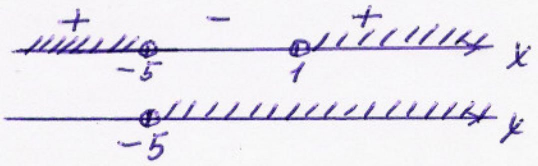
$$\begin{cases} |x-1| > 0 \\ |x-1| < 1 \end{cases} ; \begin{cases} x \neq 1 \\ -1 < x-1 < 1 \end{cases} ; \begin{cases} x \neq 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow (0;1) \cup (1;2)$$

$$\log_{|x-1|} 0{,}5 > \log_{|x-1|} |x-1|^{0{,}5}$$
$$0{,}5 < |x-1|^{0{,}5}$$
$$0{,}25 < |x-1|$$
$$x-1 < -0{,}25 \quad \text{или} \quad x-1 > 0{,}25$$
$$x < 0{,}75 \quad \text{или} \quad x > 1{,}25$$

с учётом О. Д. З. ответ: $(0; 0{,}75) \cup (1{,}25 ; 2)$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3 > 0$.

Решение: $0 < \frac{x-1}{x+5} < 1$, $\begin{cases} \frac{x-1}{x+5} > 0 \\ \frac{x-1}{x+5} < 1 \end{cases}$;



второе неравенство $\frac{x-1-x-5}{x+5} < 0$, $\frac{-6}{x+5} < 0$, $x+5 > 0$, $x > -5$

Ответ: $(1 ; +\infty)$.

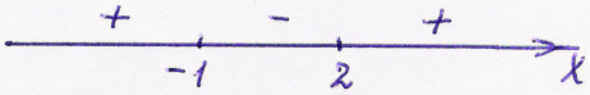
п.2 Нестандартные приёмы решения.

1. Применение подстановок в логарифмических неравенствах.

Пример 1. Решите неравенство $x^{\log_2 x} > 4x$

Решение: О.Д.З.: $x > 0$. Пусть $x = 2^t$, $t = \log_2 x$, тогда $2^{t \log_2 2^t} = 2^{t^2} > 4 \cdot 2^t$

$2^{t^2} > 2^{t+2}$, $y = 2^t$ – возрастает, т. к. $2 > 1$, $t^2 > t+2$, $t^2 - t - 2 > 0$



$t < -1$, $t > 2$

$\log_2 x < -1$, $\log_2 x > 2$

$0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 4$

Ответ: $(0, 0{,}5) \cup (4; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство: $3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} < 6$.

Решение: О.Д.З. :$x > 0$. Применим свойство логарифмов: $a^{(\log_a b)^2} = b^{\log_a b}$.

Пусть $x = 3^t$, $t = \log_3 x$, получаем $3^{t^2} + 3^{t^2} < 6$, $3^{t^2} < 3$, $y = 3^t$ − возраст.

$t^2 < 1$, $|t| < 1$, $-1 < t < 1$, $\frac{1}{3} < x < 3$.

Ответ: $(\frac{1}{3}$; 3).

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$.

Решение: О.З.Д.: $x > 0$. Пусть $x = 2^t$, тогда $\sqrt{2^{t \log_2 2^{\frac{t}{2}}}} > 2$, $2^{t \log_2 2^{\frac{t}{2}}} > 2^2$,

$2^{\frac{t^2}{2}} > 2^2$, $y = 2^t$ возрастает, $2 > 1$, т.е. $\frac{t^2}{2} > 2$, $t^2 > 4$, $|t| > 2$, $t < -2$, $t > 2$,

$0 < x < \frac{1}{4}$, $x > 4$.

Ответ: $(0 ; \frac{1}{4}) \cup (4; +\infty)$.

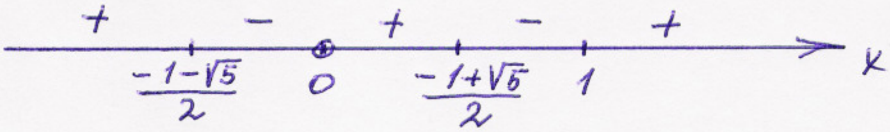
Пример 4. Решите неравенство $x^{\lg x} \cdot 2^{\log_x 10} \geq 4 \cdot 5^{(\lg x)^2}$.

Решение: О.Д.З.: $x > 0$. Пусть $x = 10^t$, $10^{t \lg 10^t} \cdot 2^{\log_{10^t} 10} \geq 4 \cdot 5^{(\lg 10^t)^2}$,

$10^{t^2} \cdot 2^{\frac{1}{t}} \geq 4 \cdot 5^{t^2}$, $2^{t^2} \cdot 5^{t^2} \cdot 2^{\frac{1}{t}} - 4 \cdot 5^{t^2} \geq 0$, $5^{t^2}\left(2^{t^2+\frac{1}{t}} - 4\right) \geq 0$,

$5^{t^2} > 0$, $2^{t^2+\frac{1}{t}} - 4 \geq 0$, $2^{t^2+\frac{1}{t}} \geq 2^2$, $t^2 + \frac{1}{t} \geq 2$, $\frac{t^3-2t+1}{t} \geq 0$, $\frac{(t-1)(t^2+t-1)}{t} \geq 0$,

применим метод интервалов:



$t \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $0 < t \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t \geq 1$ (t=lg x)

$\lg x \leq \lg 10^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ $0 < \lg x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\lg x \geq 1$

$0 < x \leq 10^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ $1 < x \leq 10^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ $x \geq 10$

Ответ: $(0, 10^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}] \cup (1; 10^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}] \cup [10;+\infty)$.

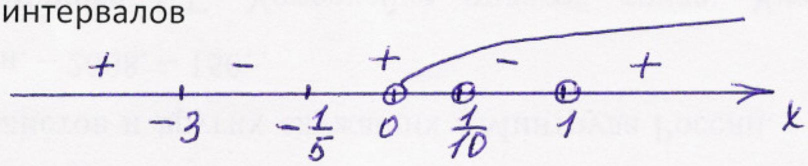
2. Замена равносильным по знаку выражением.

Для решения следующих далее неравенств применяется утверждение: выражение $a^{b}-a^{c}$ имеет тот же знак, что и выражение $(a-1)\cdot(b-c)$, а выражение $\log_{a} b$ -тот же, что и $(a-1)\cdot(b-1)$ с учётом О.Д.З.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{x}(10x+3)\cdot\log_{10x}(3x+10)\geq 0$.

Решение: О.Д.З. $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq \frac{1}{10}$.

Заменяем каждый множитель левой части неравенства равносильным по знаку выражением, получаем (x-1)(10x+2)(10x-1)(3x+9)≥ 0. Решаем методом интервалов

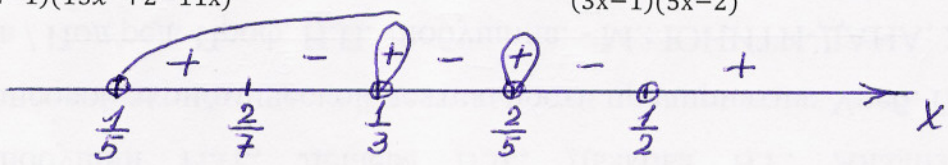


Ответ: $(0;\frac{1}{10})\cup(1;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{\log_{2x}(5x-1)\cdot\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^{2}+2}-2^{11x}}\geq 0$.

Решение: О.Д.З. $x>\frac{1}{5}$, $x\neq\frac{1}{2}$, $x\neq\frac{1}{3}$. Заменяем числитель и знаменатель дроби выражением равносильным по знаку, имеем:

$$\frac{(2x-1)(5x-2)\cdot(3x-1)(7x-2)}{(2-1)(15x^{2}+2-11x)}\geq 0\ ,\qquad \frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(3x-1)(5x-2)}\geq 0$$



Ответ: $(\frac{1}{5};\ \frac{2}{7}]\cup(\frac{1}{2};\ +\infty)$.

Упражнения:

1. $\log_{2x}(6x+\frac{1}{7})\cdot\log_{5x}(3x+\frac{4}{7})\leq 0$ Ответ: $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{1}{7}\right\}$.
2. $\frac{\log_{x^{2}+3}(x+1)-\log_{x^{2}+3}(x^{2}+1)}{\log_{x^{2}+3}(x+2)-\log_{x^{2}+3}(x^{2}+2)}\leq 2$ Ответ: $(0;1)\cup(1;+\infty)$.
3. $\log_{5}\sqrt{3x+4}\cdot\log_{x}5>1$ Ответ: $(1;4)$.
4. $\log_{5}(x^{2}-9x+20)\cdot\log_{5-x}25\geq\frac{\log_{5}10-1}{\log_{25}(5-x)}$ Ответ: $(-\infty;3]$.
5. $\log_{|x|-1}|x+2|\leq 0$ Ответ: $[-3;-2)\cup(1;2)$.